Skript

(p1) 来てくれてありがとうございます。そういう感じでに日本語のセミナーを発表するの初めてです。三週間準備して台本まで作ったのに、とても緊張しています。

とにかく、名前は Jean-Baptiste Bellynck です。ティータイムでジャンと呼んでいいです。ドイツのミュンヘン大学で大学部生として、教職課程で数学と情報学をやっています。大阪大学で Train Track と Agol Cycles を研究しています。この発表で研究していることを紹介したいです。

(p2) じゃあ、始めましょう。What is セミナーでいろいろな数学者が集まっています。オリエンテーションのために数学の地図は絶対に必要だと思います。私の趣味は YouTube で数学動画を見ることです。3Blue1Brown とか Numberphile とか Henry Segerman とか。昔、この地図も YouTube で見つけました。皆様は自分の研究部門見つけれますか？

まだ、研究室を探している学部生はここのいますね。この地図をちゃんと見て、研究テーマを選んでください。

(p3) ちなみに、一番面白いのは Geometric Topology です。左下で Topology と Measure Theory と Differential Geometry の真ん中にある大好きな部門です。

今日のテーマはこちらに入っているから、Geometric Topology は何なのかを一緒に調べましょう。

(p4) 英語の言葉をちゃんと分析すると意味を分かるはずです。まず、Geometric ということは「距離を定義してから」という。だって、幾何学は距離空間を調べる部門です。様々な距離空間があるんですから幾何学も結構広いですね。グラフの上の距離とか、球面の上の距離とか、変な空間の距離とか。

幾何学と違って、Topology は「距離を忘れる！」というスローガンは大事です。

多分、みんなはこのスライドを見て「え？ちょっと待って、矛盾ではないか」と思っていますね。もちろん、ここには矛盾がない。スローガンの意味は後でわかるようになります。

(p5) その前に、今日の目標を書いてみましょう。これから、である体を使った方がいいと言われたからそうしよう。やっぱり、日本語は難しい言語である。

ええと、目標は

・Train Track と Agol Cycle を直感的に説明して

・大好きな Geometric Topology を紹介して

・きれいな絵をいっぱい書いて見せて

・学部生に Geometric Topology をお勧めして

・ええと、最後を無視してください

そういえば、発表のチャプターは下の縁にある。

(p6) 始まる前に注意の言葉がある。まず、紹介したいことが多いので定義と定理にはよく難しい条件と情報が無視されている。このテーマが気になるとぜひ後の参照を読んでください。

それに、今日の曲面はパンクチャーが許された連結な向き付け可能がある閉曲面である。写像は向きを保つ位相同型写像である。

これから、絵がいっぱいあるから、今の言葉を分からなくてもいいと思う。

(p7) じゃあ、Geometric Topology を説明しよう。前のスローガンを覚えといてください。Geometric Topology は「距離を定義してから、距離を忘れる」ということである。言った通り、距離を定義する。具体的に、私たちの距離空間はトーラスの形を持つ惑星である。この惑星には森や町がある。2 点の間の距離は普通に、歩き距離で定義されている。

惑星の上に閉曲線を定義しよう。

こいう事情から始まる。突然、バンと地震が起こる。ゴロゴロと可哀そうなトーラスの惑星をねじらせる。

ちょっと休憩してから二つ目の地震は起こる！かわいい家は運ばせられた！そして、ガタンと地震が止まる。

(p8) さっきの例を数学的に分析しよう。二つの地震はトーラス上の写像 f を誘導させる。f は曲線 gamma1 と gamma2 を伸ばす。写像 f を無限に繰り返すと、閉曲線の長さも無限大になる。

そして、曲線の長さはある拡大率で伸ばす。f を繰り返すと、この拡大率はだんだん、lambda という実数に近づく。lambda はけして、黄金比+1より大きい。トーラスの形を粘土みたく変わってもこの不等式は変わらない。トーラスにどんな距離を下さっても、不等式は成り立つ。これは Geometric Topology である。惑星の距離を定義してから、惑星の距離と全然関係ない不等式を見つけた。なんか、この不等式はとても幾何学的のに、トーラスの幾何ではなく、トーラスの位相の特徴である。

なんで黄金比が現れるかというと、トポロジーは整数論とよくわかられていない繋がりはありそう。私はこの関係を研究しているが、このセミナーで説明しない。

(p9) Geometric Topology は二つ目の意味も持っている。質問で言えば、(atmen)「トポロジーに許された幾何の中で、一番きれい、一番シンメトリーが多い幾何は何なのか」。幾何という言葉はね、トポロジーの数学者がよく幾何と距離を入れ替わる。トポロジー数学者にとってドーナツとコーヒーコップは両方、トーラスのトポロジーを持っているが、幾何は違う。

とにかく、トポロジーに一番きれいな幾何という質問は、この一意化定理が答える。何を言っているかというと、パンクチャーが許された閉曲面はあれば、一番きれいな幾何が存在している。

トーラスを例にしよう、前のトーラス惑星は全然きれいではなかった。この絵のように山も丘もあって凸凹なところがあったから。一番きれいな幾何はこれ。ただの正方形です。でも、この正方形には面白い同値がある。

パックマンというアルケー度ゲームみたい、小さい蟻が縁を着くと逆の縁に瞬間移動させられる。位相的にこれはトーラスである。だって、正方形の縁をくっつけるとトーラスとなる。

でも、惑星トーラスと違って紙はフラットで曲率がないです。とてもシンプルな幾何である。

次、Thurston-Nielsen-分類定理は一つ目の定理と似ている。一つ目の定理は幾何をきれいにした。二つ目の定理は写像をきれいにする。この写像も前の地震で誘導させた写像もきれいではないが、きれいにできると。すると、写像は線形写像になる。

この線形写像は、この猫の絵で説明したい。この猫をまず、こうしてずらす。これは一つ目の地震と対応している。その後で、そうやってずら

す。この平行四辺形は、正方形ではないが、正方形に組み合わせる事ができる。この写像は、Arnold の猫写像と呼ばれている。

(p10) 線形写像を得てよかった。シンメトリが多いので計算はよく比較的に簡単になる。そして、計算の結果もきれいになる。例えば、写像を前と同じように無限に繰り返すと、こういう閉曲線（auf Katze zeichnen）の拡大率は前と違ってぴったり黄金比＋１となる。

(p11)それから、見ての通り、猫は畳まれてだんだん紙束っぽくなる。この紙束は葉造とよばれて、そいう伸び畳む特徴を持っている写像は pseudo-Anosov と呼ばれている。

(p12) もっとも複雑な例題を調べよう。密度が高い液体に着色料を入れ、三本の棒で混ぜ始める。この動画を見よう。見ての通り、早く葉層が現れている。

葉層は、簡単にいえば、曲面の分解である。この絵には穴が三つのディスクを見える。そのディスクは葉層で葉に分解せれている。残念だが、実験のせいで青い線の外に葉層は見えないけど、葉層はそとでも続いている。

そして、測度付き葉層には葉の密度の情報もついている。例えば、その絵で真ん中の葉のほうは密度が高い。

(p13) 今調べろうとしている写像 f はこういう動きで誘導されている。この写真でよく見えるのは、最初の葉層と最後の葉層は同じであるが、この密度は違っている。写像の後で葉層の密度がは高くなった。

さっきのように、青い葉の拡大率はだんだん実数 lambda に近づく。こういう風に葉層を不変して、密度を増加させる写像は pseudo-Anosov と呼ばれている。

(p14) 休憩だよね、これからの部分が私にとって説明にくいから、私には絶対に一分の休憩がいます。皆様は、ちょっとお隣さんと今までのことについて雑談できませんか？

(p15) お待たせしまいまして、続きましょう！休憩の前に美しい葉層を不変にする pseudo Anosov 写像を定義した。その pseudo-Anosov 写像は液体をとてもよく混ざぜるのに、完全なカオスではない。Pseudo-Anosov とその葉層の研究はきっと楽しそうになる。

でも、葉層自身はちょっと知れべにくいので、葉層をもっと簡単な train track に変化する。

葉層を区切って、別々の部分に色を付けてから、部分を髪の毛のようにグラフの辺に束ねる。たとえば、この緑の部分はこの緑の辺になる。

このグラフはただのグラフではない、train track という。train track は別々の辺はどうやって繋がっているかという情報を持っている。例えば、この絵でオレンジと青い葉はこちらに交流して緑になる。それを train track でも見える。

この絵は実験的に作られたものなので、ずるいところがある。この絵を見ると、ピンクの部分が二つある気がする。でも、それが違う。葉層は曲面の分解だから、実にこうして続いている。おかげで、ピンクの部分は連結な集合であって、ピンクの葉を束ねると、オレンジの辺はこいうおかしい形にずらされる。

(p16) train track を具体的に定義しよう。Train track はグラフとして考えてください。でも、頂点の代わりにこういうスイッチが入っている。そして、辺は枝と呼ばれている。

(p17) さっきの測度付き葉層と同じのように測度付き train track を定義する。ここに、絶対に満たさないといけない switch condition 条件を付ける。b と c という重みをもっている枝が交流すると、結果の枝の重みは b と c の和になる。

Train track を tau と書いて、測度を mu と書いて、一緒にこれは測度付き train track となる。

(p18) 葉層と train track の絵に測度を付けて、このよく知られている定義の説明に使おう。Pseudo-Anosov 写像 f があれば、この写像は唯一な葉層を不変にして、付いた測度を拡大率 lambda で増加させる。測度付き葉層で測度付き train track を作ることができる。

手順はこういう。まず、さっきのように、葉層に色を付ける。それから、平行な葉の数を図る。注意するべきことが一つ、この葉の数は本当の数ではない。理論的に葉の数は無限大だから。この数はすこし物理の質量

みたいに葉層の密度 x 色を着けた部分の太さということである。黒い線を沿って密度を積分して計算できる。

この葉層にも、switch condition と似ていることがある。オレンジの葉の数は黄金比であって、青い葉の数は 1 である。オレンジと青い葉が交流すると、緑になって、この葉の数は黄金比+ 1 になる。そして、緑の葉は向こうにシアンと赤い葉に分ける。

前のように葉層の部分を枝に束ねて、測度が付いた train track を作ることができる。

(p19) train track のメリットは何である？簡単に言えば、train track は葉層からいろいろな面白い特徴を受け継ぐ。例えば、ある意味で、得た train track は f の下で不変である。

f の作用を詳しく調べよう。f は混ざる棒の交換で定義されている。まず、右側の棒を交換してから、左側の棒を交換する。出た train track は不変と見えないが、枝とスイッチを少し動かせば元の train track に束ねることができる。

束ねるときに枝の重みを足す。結果の train track は前と同じであるが、重みは拡大率 Phi たす 1 で増加された。この枝でよく見えるね。

(p20) そいう train track はとても便利だから、定義にしよう。前のように、写像 f が train track を束ねた後で不変させて、すべての重みを実数 lambda で伸ばすと、(tau, mu)は f の下に不変と呼ばれている。

ここには書いていないけど、不変葉層から得た train track はいつも不変である。

(p21) Train track に入っている情報は有限なので、combinatorics の考え方で pseudo-Anosov 写像を研究することができる。これから、Agol cycle という道具を紹介する。Agol cycle の詳しくはまだよくわかれていないので、マジックトリックと呼んでいいと思う。

とにかく、Maximal split というオペレーションが必要である。このオペレーションは測度付き train track の一番大きい重みが付いた枝を真っ二つにして、switch condition を守るためにこういう風にに繋がっている。この例に見ると 4 + 1 は 5 になって 3 + 1 は 4 になる。

それから、Maximal splitting の繰り返しは splitting sequence と呼ばれている。

たまに一番大きい重みが付いた枝はいくつある。この時に全部の枝は一緒に split されている。

不変な train track で初めて maximal split を繰り返すと何が起こるだろう？

(p22) 例として、さっきの測度付き train track で初めて maximal split をしよう。

左の測度付き train track から始まる。一番大きい重みをもつ枝が二つあってこの重みは 3phi+2 である。両方を split してこの train track になる。見ての通り、前の枝は真っ二つにして新しい枝で繋がっている。三つ目の絵で赤い枝をぐるっと動かされた。

じゃあ、二つ目の split はここそこに行う。重みは同じで split は一緒にする。結果はこれ。青い枝を少し動いて完成である。

皆様は多分最後の train track を覚えているのだろう。さっき見た f(tau, mu)の train track だ。

(p23) 今のは変ではなかった？測度付き train track だけから、写像 f とこの dilatationlambda を蘇らせた。もちろん、これは偶然ではなかったと Ian Agol が証明した。

(p24) 不変な測度付き train track で始まって、ずっと maximal split をしたら、いつか、splitting sequence がサイクルに入る。サイクルの後で測度が拡大率 lambda で下がって、train track は f で変わる。

このサイクルは Agol cycle と呼ばれている。

一番大事な特徴は、Agol cycle が共役不変量である。完璧な共役不変量ではないが、共役問題の解決を役に立。

(p25) このほかには、そいう用途を見つけた。Thurston Train Track を zBMath という検索エンジンで検索してこの部門の論文が戻ってきた。それ以外にもいっぱいあったが、一番よく表れたのは Manifold and cell complexes と Group Theory and Generalizations と Functions of a complex variable と Dynamical systems and ergodic theory である。

Agol cycle の用途は共役問題と三次元多様体の Triangulation を作ることと私がいま研究している整数論の繋がり。

(p26) 地図で言えば、train track はここら辺で住んでいる。

(p27) これで、終わります。最後まで聞いてくれてありがとうございます。何か質問があれば、是非今か、ティタイムで聞いてください。

私の参照はこちらで、Train Track と Agol cycle に興味があったら、もっと優しいリテラチュアをお勧めできます。以上です。