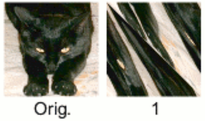
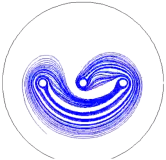
Train Tracks と Agol Cycles

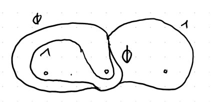
Jean-Baptiste Bellynck

スライドはホームページにある
https://jeanbellynck.github.io/

What is... セミナー
2024.06.06







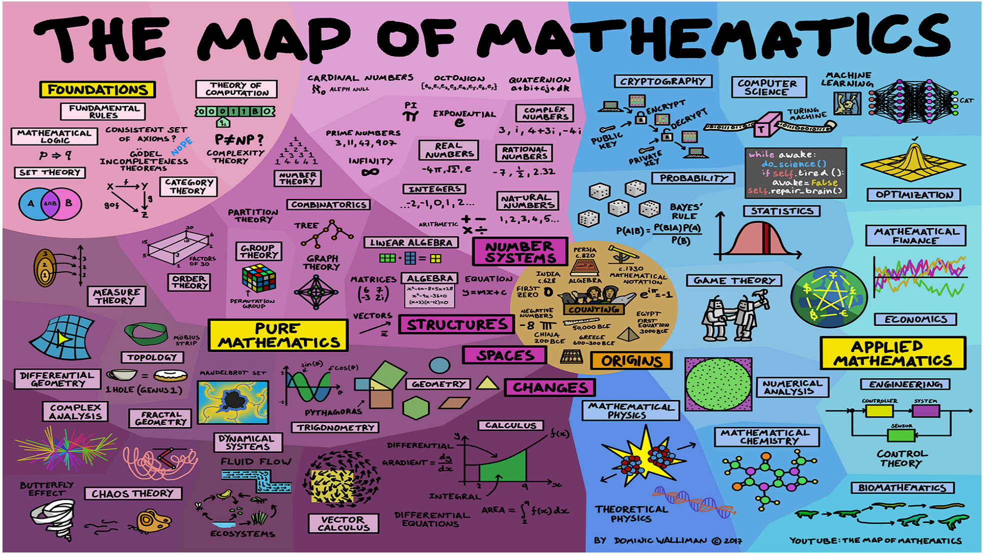
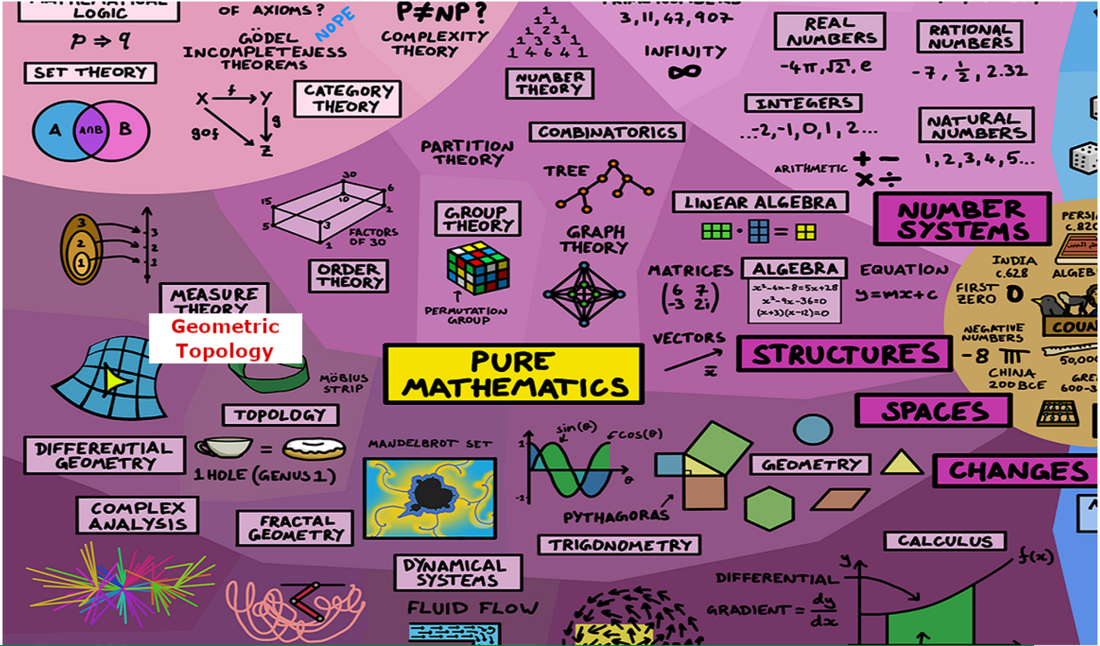


Figure: YouTube より The map of mathematics


Geometric Topology
PURE MATHEMATICS
SET THEORY
CATEGORY THEORY
P≠NP?
COMPLEXITY THEORY
GÖDEL INCOMPLETENESS THEOREMS
NOPE
NUMBER THEORY
COMBINATORICS
PARTITION THEORY
TREE
GRAPH THEORY
GROUP THEORY
PERMUTATION GROUP
ORDER THEORY
FACTORS OF 30
MEASURE THEORY
MÖBIUS STRIP
TOPOLOGY
1 HOLE (GENUS 1)
DIFFERENTIAL GEOMETRY
COMPLEX ANALYSIS
FRACTAL GEOMETRY
MANDELBROT SET
DYNAMICAL SYSTEMS
FLUID FLOW
TRIGONOMETRY
PYTHAGORAS
GEOMETRY
CALCULUS
DIFFERENTIAL
GRADIENT = dy/dx
CHANGES
SPACES
STRUCTURES
NUMBER SYSTEMS
LINEAR ALGEBRA
MATRICES
ALGEBRA
EQUATION
y=mx+c
VECTORS
INTEGERS
...-2,-1,0,1,2...
NATURAL NUMBERS
1,2,3,4,5...
REAL NUMBERS
-4π, √2, e
RATIONAL NUMBERS
-7, 1/2, 2.32
INFINITY
ARITHMETIC
3,11,47,907
INDIA c.628
FIRST ZERO
NEGATIVE NUMBERS
CHINA 200 BCE

Geometric Topology って何？

Geometric Topology

Geometric Topology って何？

距離を定義してから...

Geometric Topology

Geometric Topology って何？

目標

この講演の目標は

- Train Track を直感的に説明すること
- Train Track で幾何学的位相幾何学 (Geometric Topology) を紹介すること
- きれいな絵をいっぱい書くこと
- 大学学部生に Geometric Topology をお勧めすること
- 日本語マスターのバッジが欲しい（わがままを許してください！）

目標

この講演の目標は

- Train Track を直感的に説明すること
- Train Track で幾何学的位相幾何学 (Geometric Topology) を紹介すること
- きれいな絵をいっぱい書くこと
- 大学学部生に Geometric Topology をお勧めすること
- 日本語マスターのバッジが欲しい（わがままを許してください！）

目標

この講演の目標は

- Train Track を直感的に説明すること
- Train Track で幾何学的位相幾何学 (Geometric Topology) を紹介すること
- きれいな絵をいっぱい書くこと
- 大学学部生に Geometric Topology をお勧めすること
- 日本語マスターのバッジが欲しい（わがままを許してください !)

目標

この講演の目標は

- Train Track を直感的に説明すること
- Train Track で幾何学的位相幾何学 (Geometric Topology) を紹介すること
- きれいな絵をいっぱい書くこと
- 大学学部生に Geometric Topology をお勧めすること
- 日本語マスターのバッジが欲しい（わがままを許してください！）

目標

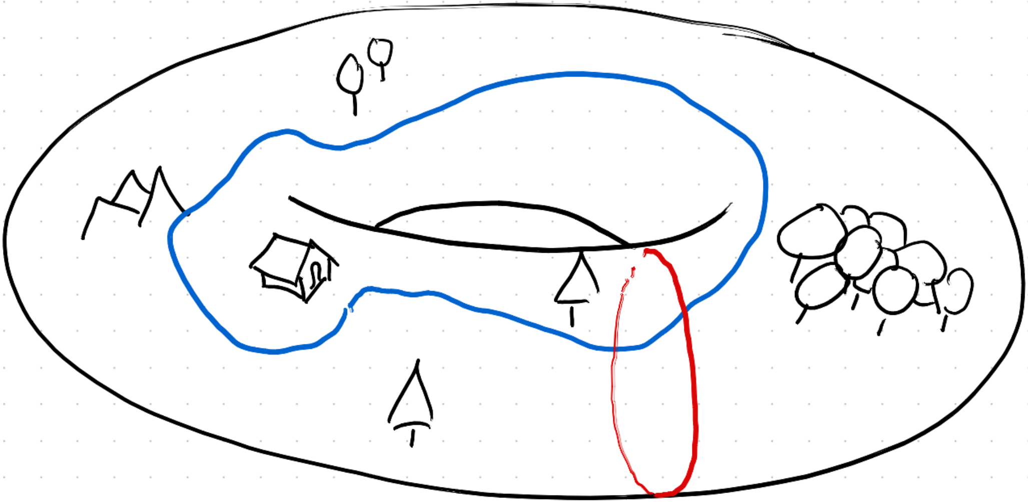
この講演の目標は

- Train Track を直感的に説明すること
- Train Track で幾何学的位相幾何学 (Geometric Topology) を紹介すること
- きれいな絵をいっぱい書くこと
- 大学学部生に Geometric Topology をお勧めすること
- 日本語マスターのバッジが欲しい（わがままを許してください!)

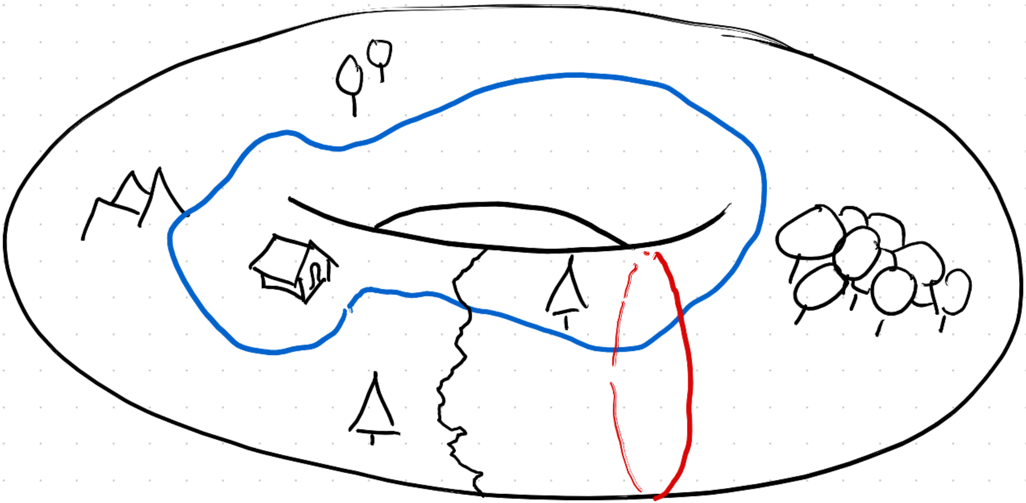
注意 (For Experts!)

今日の定義と定理は本物の定義と定理じゃなくて、分かりやすい概算である。
自分の論文で考えず使わないでください。
そして、これからの曲面は全部パンクチャーが許された連結な向き付け可能性がある閉曲面である。
今日の写像はその閉曲面の上の向きを保つ位相同型写像である。

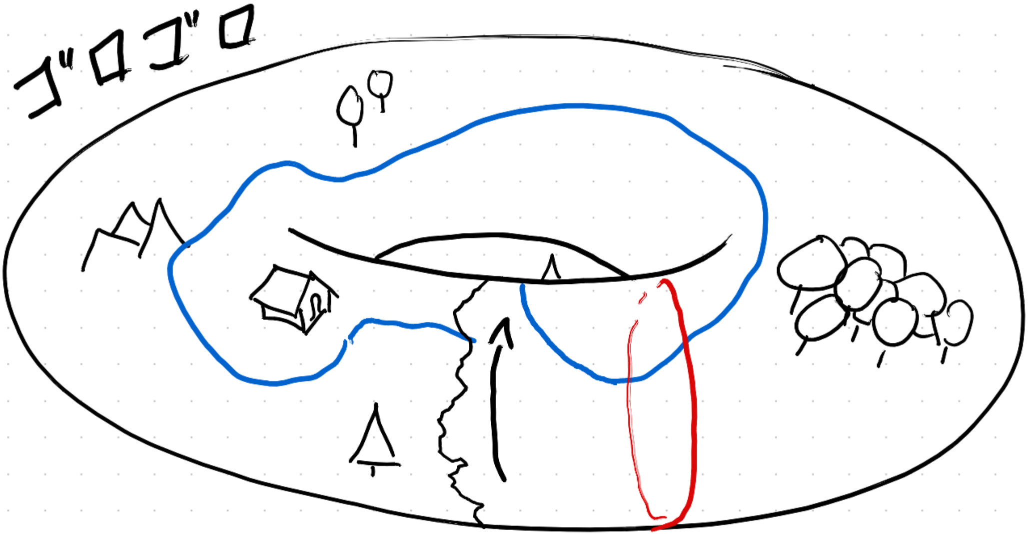
トーラスの惑星



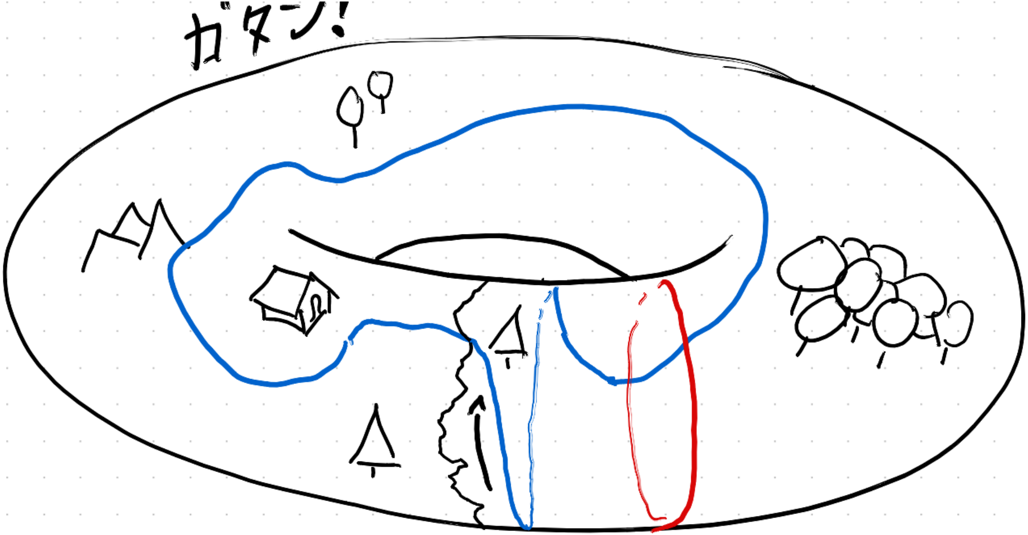
トーラスの惑星



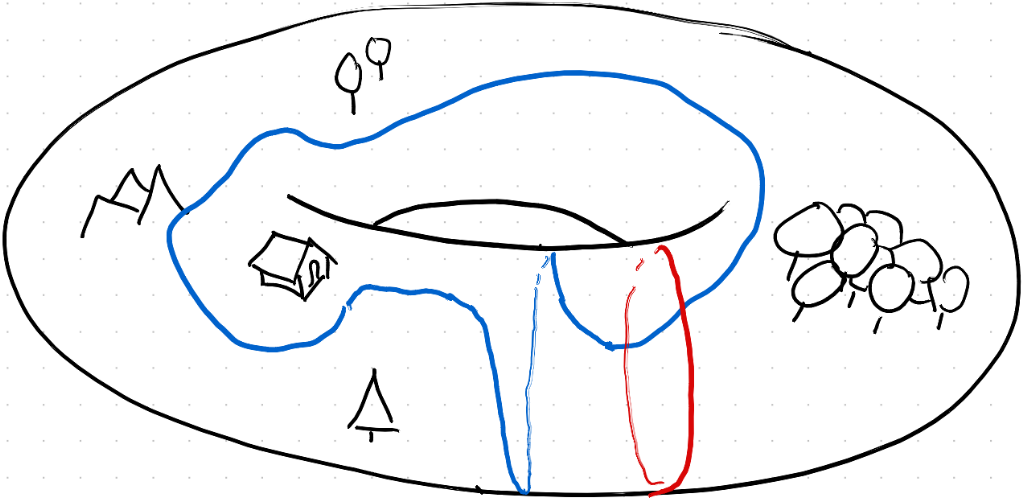
トーラスの惑星



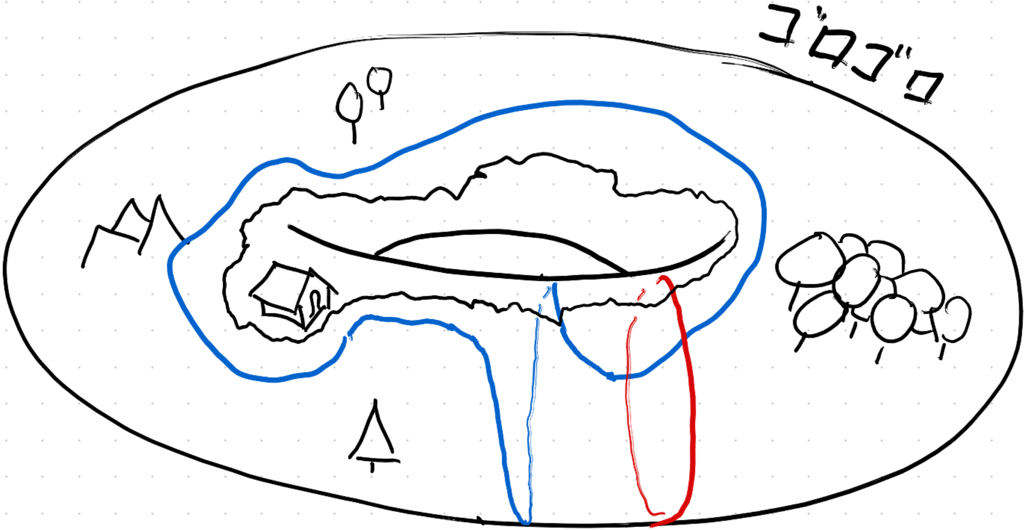
トーラスの惑星



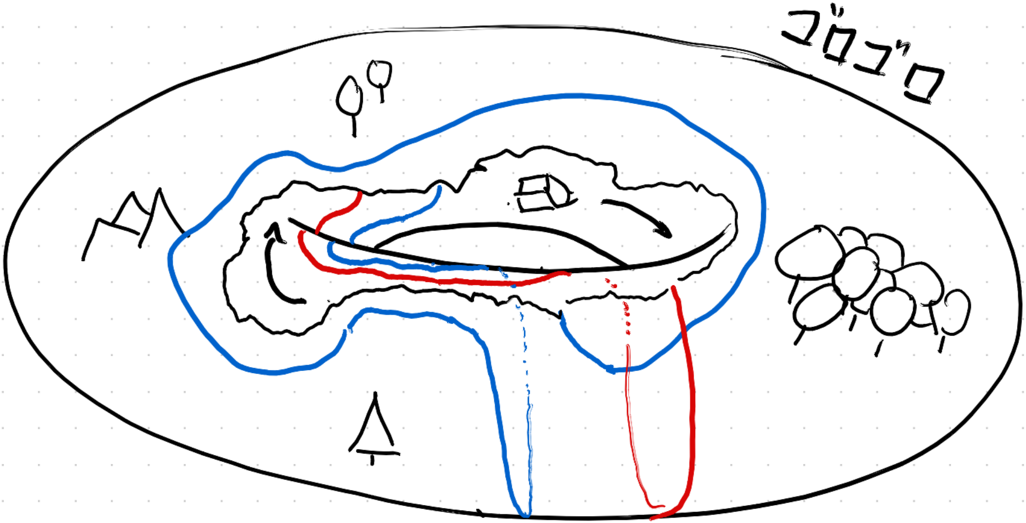
トーラスの惑星



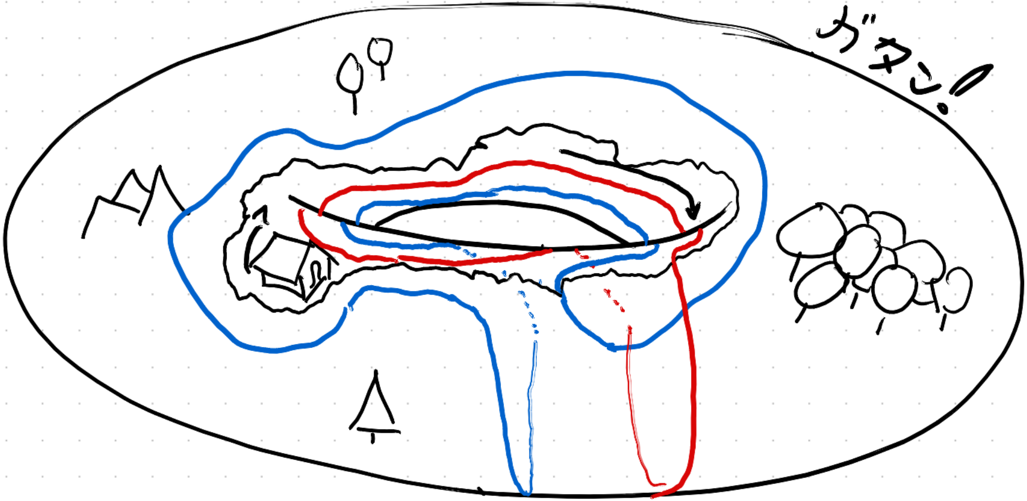
トーラスの惑星



トーラスの惑星

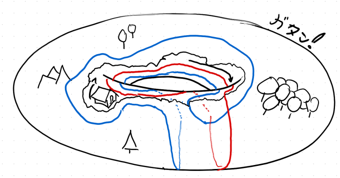


トーラスの惑星



トーラスの惑星

二つのねじりによって誘導される写像 f は、青と赤の曲線 γ_1, γ_2 の長さを伸ばす。f を無限に繰り返すと、長さは無限大になる。これはどの閉曲線に対しても成り立つ。



観察

各反復で、曲線の長さは、曲線に依存する拡大率によって増加する。ただし、さらに繰り返すと、その拡大率は実数 $\sqrt[n]{length(f^n(\gamma))} \overset{n\to\infty}{\to} \lambda$ に近づく。λ は、下から制限される。

$$\lambda \geq \Phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

Two important theorems

Σ はパンクチャーが許されている連結な閉曲面である。f は Σ 上の向きを保つ位相同型写像である。

定理 (一意化定理)

凸凹ではない幾何 (= 距離) が存在そる。Σ 上許された幾何の中で、その幾何は一番きれいで、一番シンメトリーが多くて、一番シンプルである。

定理 (Thurston-Nielsen-分類定理)

凸凹ではない写像 ψ が存在する。ψ は（*Isotopy* で）f と似ている写像の中で、一番きれいで、一番シンメトリーが多くて、一番シンプルな写像である。

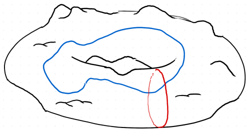


Figure: 例: 凸凹な幾何を持つトーラス

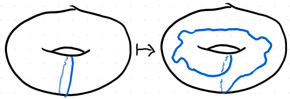


Figure: 例: 凸凹な写像

Arnold の猫写像

トーラス惑星の写像をきれいにすると、「Arnold の猫写像」になる。その写像は、トーラス上の線形写像で、Arnold に猫の絵で説明された。

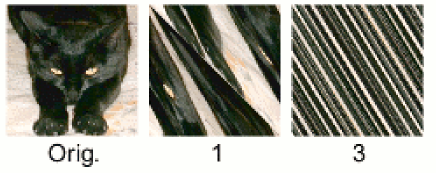


Figure: 猫写像という線形写像（Wikipedia より）

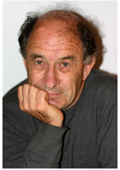


Figure: Vladimir Arnold

定義 (dilatation)

猫写像を繰り返すと、拡大率 λ は $\Phi+1$ に近づく。f またはトーラスの幾何を連続的変わっても、拡大率は決して $\Phi+1$ 未満にはならない。そのせいで、$\Phi+1$ は f の位相的不変量で *dilatation* と呼ばれている。

Arnold の猫写像

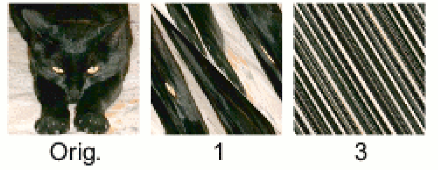


Figure: 猫写像という線形写像（Wikipedia より）

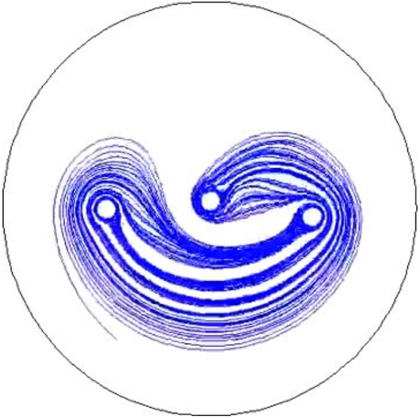
Figure: Dmitri Anosov

観察

写像は猫を畳む特徴がある。繰り返すと紙束みたいのもの（葉層という）になる。そのような写像は *pseudo-Anosov* と呼ばれている。

Pseudo-Anosov 写像

粘りが高い液体に着色料を入れ、三本の棒で混ぜ始める。
https://www.youtube.com/shorts/GXIoS43I7_0
さっさと葉層が現れている。



定義 (葉層, Foliation)

葉層とは、表面を一次元の部分集合（葉, *leaf* という）に分解することである。（いくつかの述べない条件もある）

定義 (測度付き葉層, Measured Foliation)

測度付き葉層は簡単に言えば、葉の密度 *(denseness)* の情報が付けられた葉層である。

Pseudo-Anosov 写像

かき混ぜによって誘導される写像は、この葉層を保存し、その密度を係数 λ 倍に増加させる。

定義 (Pseudo-Anosov 写像)

pseudo-Anosov 写像 f は、葉層を保存し、その密度を係数 λ 倍に増加させる自己同相写像である。λ を *dilatation* と呼ぶ。（前にあった）

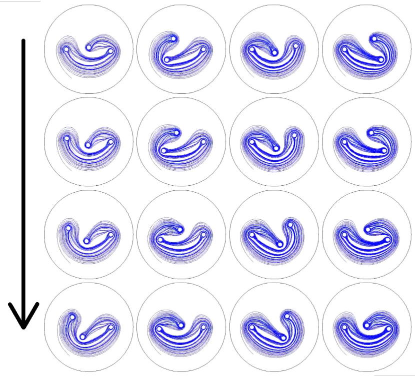
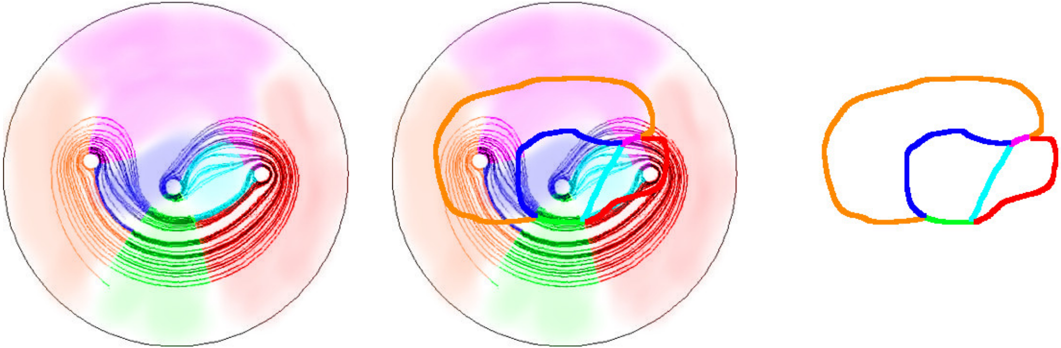


Figure: YouTube より, Topological mixing: Part 2

Small break
Kleine Pause
一分の休憩

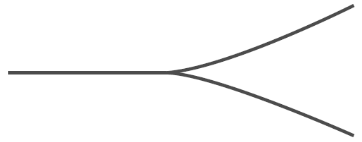
葉層の葉は要らない情報を持っている。葉層を分解して、部分に色を付けて平行な葉をグラフの辺に束ねることができる。その結果得られる図形間は、train track と呼ばれる。
(I went over a few details)
この分解は一意ではないため、多くの異なる同値な train track を得ることができる。



Train Tracks

定義 (Train track)

train track τ は、すべての頂点が以下のスイッチの形を持つグラフである。*train track* の辺は枝 *(branch)* と呼ばれている。



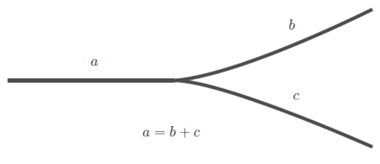
(a) Train track switch

Figure: *Agol, 2011* より

ここでは述べないが、追加の条件も必要である。

定義 (測度付き train track, Measured train track)

τ を *train track* とする。測度 μ は、*train track* の枝 b に実数の重み $\mu(b) \in \mathbb{R}_{>0}$ を割り当て、以下のスイッチ条件が成り立つようにする。



(b) Measured train track switch

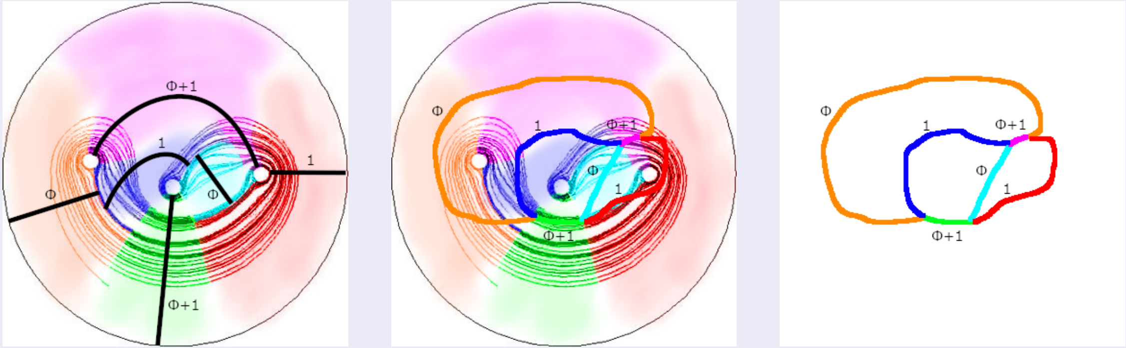
Figure: *Agol, 2011* より

この時に (τ, μ) は測度付き *train track* と呼ばれている。

Train Track

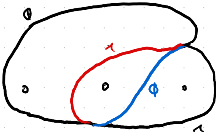
定理

pseudo-Anosov 写像 f とその測度が付いた不変葉層が与えられた場合、測度付き *train track* を見つけることができる。葉層は、この *train track* に合わせることができる。*train track* の枝は葉の「密度 $\times$ 太さ」を記述する。

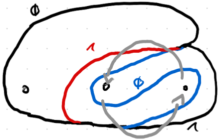


得た測度付き train track(τ, μ) も（ある意味で）前の写像 f の下で不変であると証明しよう！

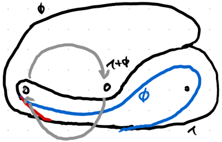
$(\tau, \mu) =$



左回りに
交換する
$\longrightarrow$

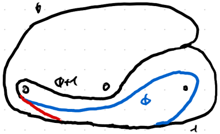


右回りに
交換する
$\longrightarrow$

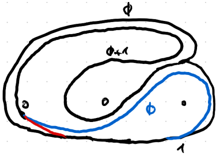


$= f(\tau, \mu)$

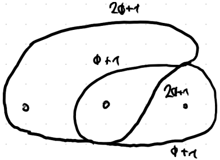
$f(\tau, \mu) =$



枝を動かす
(Isotopy)
$\longrightarrow$



枝を束ねる
(merge)
$\longrightarrow$



$= (\tau, \lambda\mu)$

写像が作用した後、train track の像を元の train track に合わせることができる。
平行な枝に重みを追加し、元の train track を得るが、すべての重みは実数 $\lambda = \phi + 1$ によって伸ばされている。

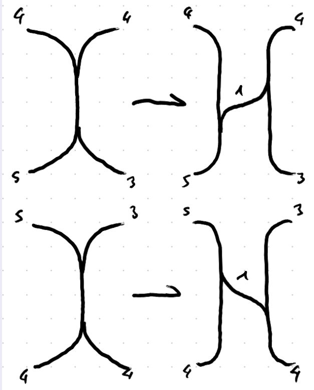
定義 (不変測度付き train track)

上記の特性を持つ測度付き *train track* は、f の下で不変と言われる。

Agol cycle (マジックトリック)

定義 (Maximal split, Splitting sequence)

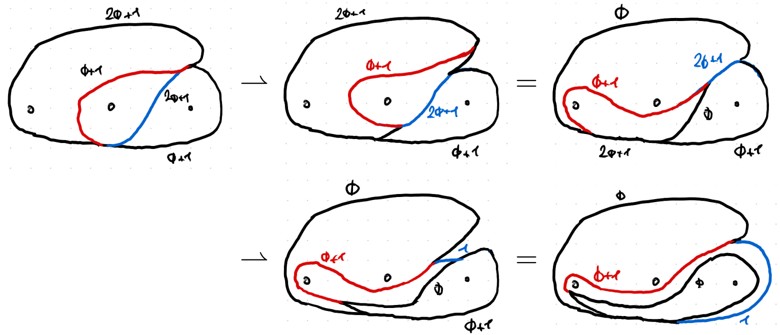
τ を測度付きの *train track* とする。*maximal split* は、最も大きい重みが付いている枝を二つに分割し、重みをつり合わせる枝で両側をつなぐ。具体的には、右側のようにする。
maximal split を繰り返すとその列は *splitting sequence* と呼ばれている。



いくつか重みが一番大きい枝があれば、全部を一緒に split する。

下の測度付き train track $(\tau, \lambda\mu)$ から、maximal splittings を繰り返そう。

$(\tau, \lambda\mu) =$

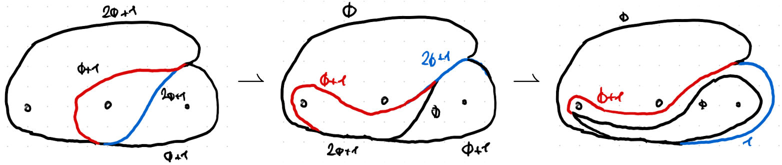


$= f(\tau, \mu)$

その結果で得られる train track は $f(\tau, \mu)$ となる!

下の測度付き train track $(\tau, \lambda\mu)$ から、maximal splittings を反復的をしよう。

$(\tau, \lambda\mu) =$



$= f(\tau, \mu)$

その結果で得られる train track は $f(\tau, \mu)$ となる!

観察

測度付き *train track* だけで、*pseudo-Anosov* 写像 f とその *dilatation* λ を再現できる。そのために *maximal splitting* しか必要ない。

Agol cycle (マジックトリック)

Ian Agol は以下の定理を証明した。

定理 (I. Agol)

f を曲面 Σ 上の *pseudo-Anosov* 写像とする。τ を f にとって測度が付いた不変な *train track* とする。すると、$n, m \in \mathbb{N}$ が存在して、以下が成り立つ

$$(\tau, \mu)\underbrace{\rightharpoonup \dots \rightharpoonup}_{n}(\tau_n, \mu_n)$$
$$\underbrace{\rightharpoonup \dots \rightharpoonup}_{m}(\tau_{n+m}, \mu_{n+m}) = f(\tau_n, \lambda^{-1}\mu_n)$$

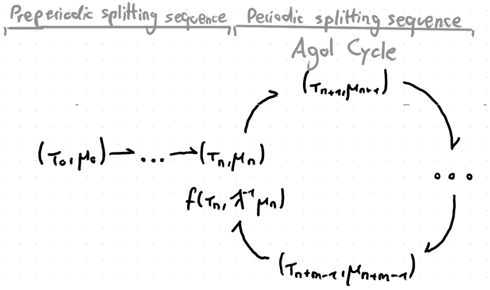


Figure: Agol の定理

Ian Agol は以下の定理を証明した。

定義 (Agol cycle)

前の *splitting sequence*

$$(\tau_n, \mu_n) \underbrace{\rightharpoonup \cdots \rightharpoonup}_{m} (\tau_{n+m}, \mu_{n+m}) = f(\tau_n, \lambda^{-1}\mu_n)$$

は *Agol cycle* と呼ばれている。

定理

Agol cycle は、共役不変量であって、共役問題の解決を役に立つ。

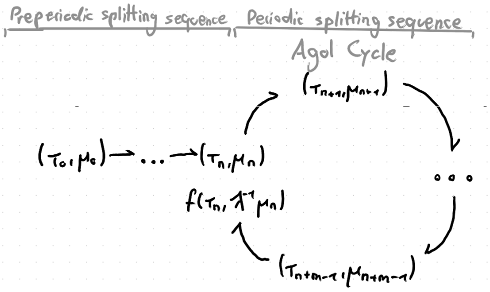


Figure: Agol の定理

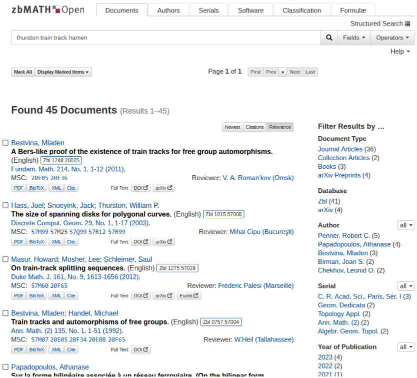
これは何に役に立つのか？

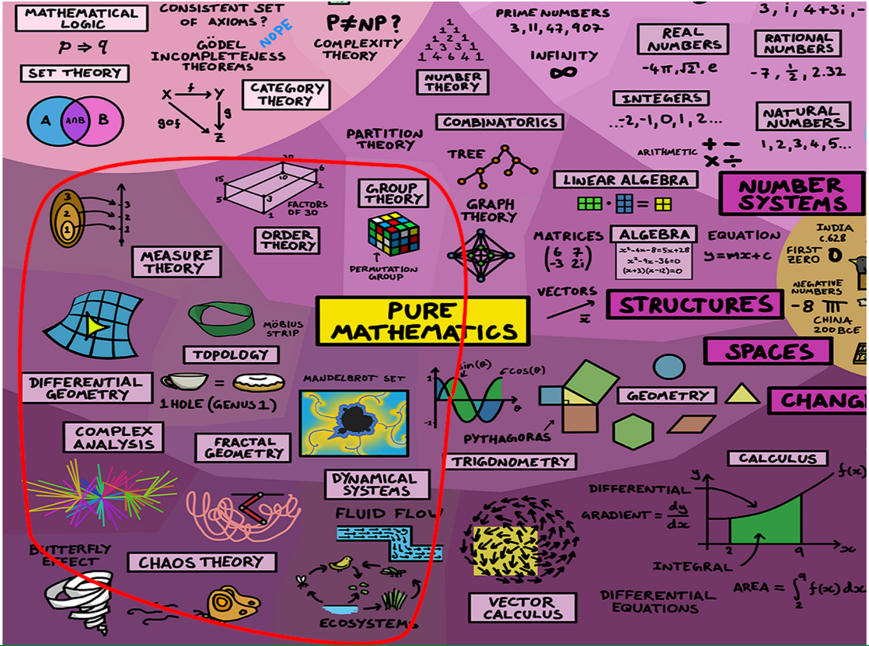
「Thurston Train Track」を zBMath で検索すると、その結果は右側に見える。zBMath によると、Train Track はこの部門によく使われている。

- Manifolds and cell complexes (34 References)
- Group Theory and Generalizations (18 Refs)
- Functions of a complex variable (10 Refs)
- Dynamical systems and ergodic theory (10 Refs)

Agol cycle の用途は

- pseudo Anosov 同型写像の共役問題
- Mapping Torus で 3 次元多様体の四面体分割を作ることができる
- 整数論の関係を分かること？




MATHEMATICAL LOGIC
p ⇒ q
SET THEORY
A
A∩B
B
CONSISTENT SET OF AXIOMS?
NOPE
GÖDEL INCOMPLETENESS THEOREMS
P≠NP?
COMPLEXITY THEORY
CATEGORY THEORY
X
Y
Z
f
g
g∘f
NUMBER THEORY
PRIME NUMBERS
3, 11, 47, 907
INFINITY
∞
REAL NUMBERS
-4π, √2, e
RATIONAL NUMBERS
-7, 1/2, 2.32
INTEGERS
...-2, -1, 0, 1, 2...
NATURAL NUMBERS
1, 2, 3, 4, 5...
ARITHMETIC
+ − × ÷
3, i, 4+3i
COMBINATORICS
PARTITION THEORY
TREE
GRAPH THEORY
LINEAR ALGEBRA
NUMBER SYSTEMS
FACTORS OF 30
ORDER THEORY
GROUP THEORY
PERMUTATION GROUP
MEASURE THEORY
MATRICES
ALGEBRA
EQUATION
y=mx+c
VECTORS
STRUCTURES
INDIA c.628
FIRST ZERO
0
NEGATIVE NUMBERS
-8
CHINA 200 BCE
PURE MATHEMATICS
SPACES
MÖBIUS STRIP
TOPOLOGY
DIFFERENTIAL GEOMETRY
1 HOLE (GENUS 1)
MANDELBROT SET
sin(θ)
cos(θ)
GEOMETRY
CHANG
PYTHAGORAS
COMPLEX ANALYSIS
FRACTAL GEOMETRY
TRIGONOMETRY
CALCULUS
DYNAMICAL SYSTEMS
DIFFERENTIAL
GRADIENT = dy/dx
f(x)
FLUID FLOW
BUTTERFLY EFFECT
CHAOS THEORY
INTEGRAL
AREA = ∫ f(x) dx
ECOSYSTEMS
VECTOR CALCULUS
DIFFERENTIAL EQUATIONS

Thank you!

Danke sehr!

ありがとうございます!

参考文献

Agol, I. (2011). Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori. In *Topology and geometry in dimension three. triangulations, invariants, and geometric structures. conference in honor of william jaco's 70th birthday, stillwater, ok, usa, june 4–6, 2010* (pp. 1–17). Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). https://doi.org/10.1090/conm/560/11087

Hodgson, C. D., Issa, A., & Segerman, H. (2016).Non-geometric veering triangulations. *Exp. Math.*, *25*(1), 17–45. https://doi.org/10.1080/10586458.2015.1005256

Penner, R. C., & Harer, J. L. (1992). *Combinatorics of train tracks* (Vol. 125). Princeton, NJ: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400882458