Aufgabe 5. Zentraler Grenzwertsatz [6 Pkt]

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$.

a) **[1 Pkt]** Beweisen oder widerlegen Sie: "Die Zufallsvariable $|X|$ ist normalverteilt." Begründen Sie jeden Ihrer Argumentationsschritte.

b) **[2 Pkt]** Formulieren Sie den zentralen Grenzwertsatz aus der Vorlesung.

c) **[3 Pkt]** Es sei nun $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie identisch verteilter Zufallsvariablen, wobei die Verteilung von Y_1 die gleiche sei wie die von $|X|$. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen c_1 und c_2 gibt, sodass die Familie von Zufallsvariablen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - c_1), \quad n \in \mathbb{N},$$

in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0, c_2)$ konvergiert. Begründen Sie jeden Schritt.

a) ~~Betrachte~~ Für jede Normalverteilte ZV Z gilt $P(Z < 0) > 0$ 1/1

aber $|X| \geq 0 \Rightarrow P(|X| < 0) = 0$ ↯ $|X|$ nicht norm. verteilt ✓

b) Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folge von unabhängigen und identisch verteilten Variablen

$E(X_i), \underbrace{Var(X_i)}_{=\sigma^2} < \infty$

Dann konvergiert $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0, \sigma)$ in Verteilung gegen ~~die~~ eine Normalverteilung ✓ 2/2

~~hier~~ mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung σ

c) ~~Sei $c_1 = E[|X|] =$~~ Sei f Dichte der Standardnormalv. $\int f(x)dx = 1$

Sei $c_2^2 = Var(|X|) = \int_0^\infty |x| f(x)\, dx \underset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} < \infty$

~~f Standardnormalverteilungs~~ was passiert mit $|x|^2$?

$\Rightarrow c_1 = E(|X|) < \infty$ wegen Existenz des 2. Moments

Nach ZGWS konvergiert

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - E(Y_i)) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sqrt{Var(X)}) = N(0, c_2)$$ 2/3

Aufgabe 5. Zentraler Grenzwertsatz [6 Pkt]

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$.

a) **[1 Pkt]** Beweisen oder widerlegen Sie: "Die Zufallsvariable $|X|$ ist normalverteilt." Begründen Sie jeden Ihrer Argumentationsschritte.

b) **[2 Pkt]** Formulieren Sie den zentralen Grenzwertsatz aus der Vorlesung.

c) **[3 Pkt]** Es sei nun $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie identisch verteilter Zufallsvariablen, wobei die Verteilung von Y_1 die gleiche sei wie die von $|X|$. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen c_1 und c_2 gibt, sodass die Familie von Zufallsvariablen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - c_1), \quad n \in \mathbb{N},$$

in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0, c_2)$ konvergiert. Begründen Sie jeden Schritt.

a) ~~Betrachte~~ Für jede Normalverteilte ZV Z gilt $P(Z < 0) > 0$

aber $|X| \geq 0 \Rightarrow P(|X| < 0) = 0$ ↯ $|X|$ nicht norm. verteilt ✓ 1/1

b) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folge von unabhängigen und identisch verteilten Variablen

$E(X_i)$, $\underbrace{Var(X_i)}_{=\sigma^2} < \infty$

Dann konvergiert $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0, \sigma)$ in Verteilung gegen eine Normalverteilung ✓ 2/2

~~hier~~ mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung σ

c) ~~Sei $c_1 = E(|X|) =$~~ Sei f Dichte der Standardnormalv. $\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$

Sei $c_2^2 = Var(|X|) = \int_0^{\infty} |x| f(x)\, dx \underset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} < \infty$

~~f Standardnormalverteilungs~~ was passiert mit $|x|$?

$\Rightarrow c_1 = \mathbb{E}(|X|) < \infty$ wegen Existenz des 2. Moments

Nach ZGWS konvergiert

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mathbb{E}(Y_i)) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, \sqrt{Var(X)}) = N(0, c_2)$$

2/3

Aufgabe 4. Starkes Gesetz der großen Zahlen [12 Pkt]

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) **[2 Pkt]** Formulieren Sie das starke Gesetz der großen Zahlen aus der Vorlesung.

b) **[6 Pkt]** Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$H_n : (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto H_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Es sei $p \in]0,1[$. Weiterhin sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen und es gelte $X_i : \Omega \to \mathbb{N}$ mit $X_i \sim \text{Geom}(p)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine reellwertige Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass gilt

$$H_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} Y,$$

d.h. $H_n(X_1, \dots, X_n)$ konvergiert für $n \to \infty$ stochastisch gegen Y. Beweisen Sie ihre Behauptung und begründen Sie dabei jeden Schritt.

Bemerkung: Achten Sie auf den Wertebereich der Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{N}$. Hier verwenden wir die Konvention $0 \notin \mathbb{N}$.

c) **[4 Pkt]** Berechnen Sie Y in Abhängigkeit von p so explizit wie möglich und geben Sie alle Rechenschritte an.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, das Intregal $\int_0^a t^{k-1} dt$, wobei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

a) Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ identisch verteilt und unabhängig. Sei $\mathbb{E}(X_i), Var(X_i) < \infty$

Dann gilt: ~~$\mathbb{P}(X_i \to \mathbb{E}(X_1)) = 1$~~ $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}(X_1)\right) = 1$ ✓

2P.

b) Betrachte $H_1(X_1) = X_1$

$H_2(X_1, X_2) = \frac{2}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}}$

Idee gut!

Betrachte: $G_n := \frac{1}{H_n} \Leftrightarrow H_n = \frac{1}{G_n}$

$G_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$ ✓

$= +\infty$!

~~Da~~ $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X_i}\right) \cancel{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p(1-p)^n}} = \frac{1}{p} \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$

$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X_i^2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^2 (1-p)^{2n}} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1-(1-p)^2} < \infty$

Unsinnige Rechnung.

D.h. $G_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} \xrightarrow[n \to \infty]{f.s.} \frac{1}{p^2}$

Nun berechne:

$\mathbb{P}(H_n \longrightarrow p^2) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{H_n} \longrightarrow \frac{1}{p^2}\right) = \mathbb{P}\left(G_n \longrightarrow \frac{1}{p^2}\right) = 1$

H_n konvergiert fast sicher gegen die ~~Verteilung~~ ZV $Y = p^2$ und damit auch stochastisch

1P.

Vorname, Nachname:

Aufgabe 3, Seite 1/3:

d) $\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$

Borel-Cantelli: $\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} \{|X_n| > \varepsilon\}\right) = 0$ ~~$\Longleftrightarrow |X_n| \le \varepsilon \ \forall n \ge N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ fast sicher~~

~~$\Longrightarrow |X_n| \xrightarrow{f.s.} 0$~~

$\Updownarrow$

$\mathbb{P}(\forall n \ge N \text{ für ein } N \in \mathbb{N} : |X_n| > \varepsilon) = 0$

$\Updownarrow$

$\mathbb{P}(\forall n \ge N \text{ für ein } N \in \mathbb{N} : |X_n| \le \varepsilon) = 1$

$\Updownarrow$

$\mathbb{P}(|X_n| \to 0) = 1$

$\Updownarrow$

$|X_n| \xrightarrow[n \to \infty]{f.s.} 0$

Falsche/ Unvollständige Argumente.

1P.

e) Zeige d) d.h. $\sum_{n \ge 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \ne 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^3} < \infty$$

$\Longrightarrow |X_n| \xrightarrow{f.s.} 0$ nach d)

2P.

Aufgabe 3. Lemma von Borel-Cantelli [14 Pkt]
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X reellwertige Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) **[2 Pkt]** Formulieren Sie das Lemma von Borel-Cantelli aus der Vorlesung. Führen Sie dabei alle verwendeten mathematischen Objekte sauber ein.

b) **[1 Pkt]** Geben Sie die Definition dafür an, dass X_n für $n \to \infty$ fast sicher gegen X konvergiert.

A $=$

c) **[3 Pkt]** Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\{\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : |X_n| > \epsilon\}$ ein messbares Ereignis ist und begründen Sie dabei jeden Schritt.

d) **[6 Pkt]** Beweisen Sie die folgende Behauptung: Falls für alle $\epsilon > 0$ die Bedingung

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty$$

erfüllt ist, dann folgt, dass X_n für $n \to \infty$ fast sicher gegen 0 konvergiert. Geben Sie dabei alle Ihre Beweisschritte an.

Hinweis: Für eine reelle Zahlenfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, genau dann wenn für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > N$ gilt $|\alpha_n| \leq \frac{1}{m}$.

e) **[2 Pkt]** Betrachten Sie nun für $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable $X_n : \Omega \to \{-n, 0, n\}$ mit der Verteilung

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^3} = \mathbb{P}(X_n = n) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^3}.$$

Beweisen Sie, dass X_n für $n \to \infty$ fast sicher gegen 0 konvergiert, und geben Sie alle Ihre Beweissschritte an.

a) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsereignisse eines W-Raums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- Gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$
- Gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ und A_n unabhängig $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ ✓ 2P.

b) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X \iff \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$ ✓ 1P.

c) $\{\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N : |X_n| > \varepsilon\}^c = \{\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N : |X_n| \leq \varepsilon\}$

X $\underbrace{\{|X_n| \to X\}}_{\text{messbar wg. Stetigkeit von } |\cdot|}$ $\Rightarrow A$ messbar

~~$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{X_n \to X\}) = \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$ also A messbar~~ (✓) Idee gut.

~~$\Rightarrow A^c$ ist messbar mit $\mathbb{P}(A^c) = 0$~~

~~Was ist Gilt $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$~~

~~$A = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \underbrace{\{\exists n>N : |X_n| > \varepsilon\}}_{=:A_n}$~~ ~~$A_n^c = \{\forall n>N : |X_n| \leq \varepsilon\} =$~~ $\underbrace{\bigcap_{n>N} \{|X_n| \leq \varepsilon\}}_{\text{messbar}}$ 1P.

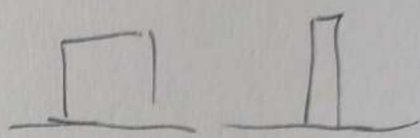
Vorname, Nachname:

Aufgabe 2, Seite 1/3:

$$= \int_0^\infty z e^{-z}\left(1+\frac{z+1}{\lambda}\right) dz$$

Wieso kann man einfach ableiten?

f(Sx)



Berechne Dichte:

$$c)\ p = F'(x) = \lambda^2 e^{\lambda(b-x)}\left(x-b+\frac{1}{\lambda}\right) - \lambda e^{\lambda(b-x)}$$

$$= \lambda e^{\lambda(b-x)}\left((\lambda(x-b)+1)-1\right) \checkmark$$

$$E(X) = \int_b^\infty x\, \lambda e^{\lambda(b-x)}\left((\lambda(x-b)+1)-1\right) dx$$

$$\underset{x-b=y}{=} \int_0^\infty (y+b)\, \lambda e^{-\lambda y}\left((\lambda y+1)-1\right) dy$$

$$\underset{\lambda y=z}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (z+b\lambda)\, e^{-z}\left((z+1)-1\right) dz$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (z+b\lambda)\, e^{-z} z \, dz$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\underbrace{\int_0^\infty e^{-z} z^2 \, dz}_{\cancel{\text{Integral über Exp.Vert} = 1}} + \underbrace{\int_0^\infty b\lambda z e^{-z}\, dz}_{\text{EW der Exp.vert} = 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(2 + b\lambda\right) = \frac{2}{\lambda} + b \checkmark$$

$$(gf)' = g'f + f'g \Leftrightarrow \int fg' = gf - \int f'g$$

$$\int_0^\infty z e^{-z} dz = \cancel{\int_0^\infty -e^{-z} dz}$$

$$\left[-ze^{-z}\right]_0^\infty - \int_0^\infty$$

$$\int_0^\infty z^2 e^{-z} dz = \underbrace{\left[-z^2 e^{-z}\right]_0^\infty}_{0} - \underbrace{\int_0^\infty 2ze^{-z}}_{1} = 2$$

6/7

Aufgabe 2. Verteilungsfunktionen [17 Pkt]

a) **[4 Pkt]** Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. In der Vorlesung gab es ein Theorem, welches besagt, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}'$ mit Verteilungsfunktion F genau dann existiert, wenn F gewisse Eigenschaften hat. Nennen Sie diese Eigenschaften.

Betrachten Sie für den Rest der Aufgabe die Funktion

$$F_{a,b}^{\lambda} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto F_{a,b}^{\lambda}(x) := a \cdot \left(\frac{1}{e^{\lambda b}} - \frac{\lambda}{e^{\lambda x}} \left(x - b + \frac{1}{\lambda} \right) \right) \cdot \mathbb{1}_{[b,\infty[}(x),$$

wobei $b, \lambda > 0$ fixiert sind und $a \in \mathbb{R}$.

b) **[6 Pkt]** Finden Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass $F_{a,b}^{\lambda}$ die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung und begründen Sie dabei jeden Schritt.

c) **[7 Pkt]** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_{a,b}^{\lambda}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und begründen Sie dabei jeden Rechenschritt.

Bemerkung: Für c) ist der Wert von a, der in Teilaufgabe b) zu berechnen ist, wichtig. Falls Sie die vorige Teilaufgabe nicht lösen können, rechnen Sie mit allgemeinem $a \in \mathbb{R}$.

$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

a) • $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ✓ • $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ ✓

3/4

• $\lim_{x \searrow x_0} F(x) = F(x_0)$ ✓

+ mon. steigend

b) Sei $F := F_{a,b}^{\lambda}$

• $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ da $\forall \lim \mathbb{1}_{[b,\infty[}(x) = 0$ ✓

• $\lim_{x \to \infty} F(x) = a \cdot \left(\frac{1}{e^{\lambda b}} - \underbrace{\frac{\lambda}{e^{\lambda x}} \left(x - b + \frac{1}{\lambda} \right)}_{\to 0} \right) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[b,\infty[}(x)}_{\to 1} \overset{!}{=} 1$ ✓

$\Longleftrightarrow a \cdot \frac{1}{e^{\lambda b}} = 1 \Longleftrightarrow \underline{\underline{a = e^{\lambda b}}}$ ✓

• $\lim_{x \searrow b} F(x) = \cancel{\quad}$ b sonst $\lim_{x \searrow x_0} F(x) = x_0$ da $F(x)$ für $x \neq b$ stetig ✓

da $\mathbb{1}_{[b,\infty[}$ rechts stetig ✓

4/6

$\cancel{c) \text{ Für } a = e^{\lambda b} \text{ ist } F(x) = \left(1 - \lambda e^{\lambda(b-x)} \left(x - b + \frac{1}{\lambda}\right)\right) \cdot \mathbb{1}_{[b,\infty}}$

$\cancel{\text{Berechne Dichte } p|_{]-\infty,b[}} = 0$

$\cancel{p|_{[b,\infty[} = F'(x) = -\lambda \frac{e^{\lambda b}}{e^{\lambda x}} (-\lambda)\left(x - b + \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda e^{\lambda(b-x)}}$

$\cancel{\mathbb{E}[X] = \int_b^\infty p(x)\, x \, dx = \int_0^\infty \left(\lambda e^{-\lambda y} \left(y + \frac{1}{\lambda}\right) + \lambda e^{-\lambda y}\right) y = \int_0^\infty \left(e^{-z}\left(\frac{z}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) + e^{-z}\right) z}$

$x - b = y$ Substit. $\lambda y = z$

Aufgabe 1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten [11 Pkt]

Betrachten Sie folgendes Zufallsexperiment: Es wird ein handelsüblicher, 6-seitiger, fairer Würfel geworfen und anschließend wird so oft, wie es die Augenzahl des Würfelergebnisses anzeigt, eine faire Münze geworfen. Der Würfelwurf und die Münzwürfe werden dabei unabhängig voneinander durchgeführt.

a) **[3 Pkt]** Modellieren Sie dieses Experiment mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Bei Verwendung von Zufallsvariablen bzw. Wahrscheinlichkeitsmaßen, diskutieren Sie auch deren Wohldefiniertheit und Existenz.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

   i) **[3 Pkt]** *Beim Werfen der Münze fällt 5-mal 'Zahl'* unter der Bedingung, dass *eine 6 gewürfelt wurde,*

   ii) **[3 Pkt]** *Beim Werfen der Münze fällt 5-mal 'Zahl',*

   iii) **[2 Pkt]** *Es wurde eine 6 gewürfelt* unter der Bedingung, dass *beim Werfen der Münze 5-mal 'Zahl' fällt.*

a) $\Omega = [6] \times \{0,1\}^6$, $X: \Omega \to \{0, \dots, 6\}$ misst anzahl an ~~Kopf~~ Zahl

$(w, m_1, \dots, m_6) \mapsto \sum_{n=1}^{w} m_n$

$\mathbb{P}$ gleichverteilt ~~[illegible]~~ nein, bis Augenzahl n werden nur n Münzwürfe gemacht

1

$\Rightarrow$ Raum ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

$Y: \Omega \to [1]$ misst würfelwurf

$(w, m_1, \dots, m_6) \mapsto w$

$\mathbb{P} = \dots$, Bildmenge X, Y

Warum

b) i) $\mathbb{P}(X=5 \mid Y=6) = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{32}$ ✓ 1

ii) $\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(X=5 \mid Y=5)\,\mathbb{P}(Y=5) + \mathbb{P}(X=5 \mid Y=6)\,\mathbb{P}(Y=6)$ 2

total prob

$\neq \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{64}\frac{1}{6} = \frac{1}{96} + \frac{1}{64} = \frac{5}{192}$ $\frac{7}{64 \cdot 6}$

iii) $\mathbb{P}(Y=6 \mid X=5) = \mathbb{P}(X=5 \mid Y=6)\frac{\mathbb{P}(Y=6)}{\mathbb{P}(X=5)} = \cancel{\frac{3}{32}\frac{\frac{1}{6}}{\frac{35}{192}} = \frac{3}{32}\frac{32}{35} = \frac{3}{5}}$?

Bayes

$\neq \frac{3}{32}\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{64 \cdot 6}} = \frac{3}{32}\frac{64}{7} = \frac{6}{7}$ ✓

1